Cvičení z teorie pravděpodobnosti 2

2. martingaly

1. definice martingalu, kritérium pro indexové množiny $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, -\mathbb{N}, \mathbb{Z}$
2. vlastnosti Poissonova procesu

---

1. Buď $(X_n, n \in \mathbb{N})$ posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin a $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$ taková filtrace, že $\sigma(X_n) \subseteq \mathcal{F}_n \perp\!\!\!\perp \sigma(X_{n+1})$. Označme $S_n \triangleq \sum_{k=1}^n X_k$. Ukažte, že
   (a) $\mathbb{S}_n \triangleq S_n - n\,\mathbb{E}[X_1]$ je $\mathcal{F}_n$-martingal, pokud $X_1 \in \mathbb{L}_1$.
   (b) $V_n \triangleq \mathbb{S}_n^2 - n\,\mathrm{var}(X_1)$ je $\mathcal{F}_n$-martingal, pokud $X_1 \in \mathbb{L}_2$.
   (c) $\mathcal{E}_n^{(\alpha)} \triangleq \exp\{\alpha S_n - \beta n\}$ je $\mathcal{F}_n$-martingal, pokud $\beta \triangleq \ln Ee^{\alpha X_1} \in \mathbb{R}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Buď $W = (W_t, t \geq 0)$ Wienerův proces. Ukažte, že procesy $W_t, V_t \triangleq W_t^2 - t, \mathcal{E}_t^{(\alpha)} \triangleq \exp\{\alpha W_t - \frac{1}{2}\alpha^2 t\}$ jsou $\mathcal{F}_t^W$-martingaly pro $\alpha \in \mathbb{R}$ (či $\mathbb{C}$).
3. Nechť $N = (N_t, t \geq 0)$ je Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$. Ukažte, že
   (a) $M_t \triangleq N_t - \lambda t$ je $\mathcal{F}_t^N$-martingal
   (b) $V_t \triangleq M_t^2 - \lambda t$ je $\mathcal{F}_t^N$-martingal
   (c) $\mathcal{E}_t^{(\alpha)} \triangleq \exp\{\alpha N_t - \beta t\}$ je $\mathcal{F}_t^N$-martingal pro vhodné $\beta \in \mathbb{R}$.
4. Pólyovo urnové schéma. Uvažujte urnu, ve které je na počátku v čase $n = 0$ umístěno celkem b bílých a c černých kuliček. V každém časovém intervalu $(n-1, n)$ jednou vytáhneme náhodně vybranou kuličku z urny a vrátíme ji zpět spolu s dalšími celkem z kuličkami stejné barvy. Ukažte, že relativní počet kuliček bílé barvy v urně je martingal.
5. Nechť $(X_n, n \in \mathbb{N})$ je posloupnost náhodných veličin takových, že $(X_1, \cdots, X_n)$ má kladnou hustotu $f_n : \mathbb{R}^n \to (0, \infty)$. Dále předpokládejme, že je dán konzistentní systém[1] hustot $g_n, n \in \mathbb{N}$. Ukažte, že proces
$$T_n \triangleq \frac{g_n(X_1, \cdots, X_n)}{f_n(X_1, \cdots, X_n)} \quad \text{je} \quad \sigma(X_1, \cdots, X_n)\text{-martingal.}$$
6. Buď $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}_0)$ je filtrace na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a $(Q_n)_{n=0}^\infty$ konzistentní systém $\mathcal{F}_n$-pravděpodobnostních měr, tj. $Q_n|\mathcal{F}_{n-1} = Q_{n-1}, n \in \mathbb{N}$, takových, že $Q_n \ll P|\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}_0$. Ukažte, že $X_n \triangleq \frac{dQ_n}{dP|\mathcal{F}_n}$ je $\mathcal{F}_n$-martingal.
7. Nechť $X_n : (\Omega, \mathcal{A}) \to (S_n, \mathcal{S}_n), n \in \mathbb{N}$ je posloupnost náhodných veličin. Buď P pravděpodobnostní míra na $(\Omega, \mathcal{A})$. Buď dále $\nu_n, n \in \mathbb{N}$ konzistentní posloupnost pravděpodobnmostních měr[2] takových, že $\nu_n \ll P_{X_1,\ldots,X_n} =: \mu_n$. Podobně jako v předchozím případě ukažte, že následující věrohodnostní poměr $T_n = \frac{\mathrm{d}\nu_n}{\mathrm{d}\mu_n}(X_1, \ldots, X_n)$ mezi $H_1 : (X_1, \ldots, X_n)^\intercal \sim \nu_n$ a mezi $H_0 : (X_1, \ldots, X_n)^\intercal \sim \mu_n$ je $\sigma(X_1, \ldots, X_n)$-martingal za platnosti nulové hypotézy H_0.
8. Buď $(X_n, n \in \mathbb{N})$ posloupnost nezávislých stejně rozdělených integrovatelných náhodných veličin. Ukažte, že proces $(Z_m, m \in -\mathbb{N})$ je martingal, kde
$$Z_{-n} = \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k.$$

---

1. Buď $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Systém $(\mathcal{F}_t, t \in T)$, kde $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{A}, t \in T \subseteq \mathbb{R}$, sub-$\sigma$-algeber $\mathcal{A}$ nazveme filtrací, pokud $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ platí kdykoli $s \leq t,\ s, t \in T$.
2. Proces $(X_t, t \in T)$ pak nazveme $\mathcal{F}_t$-martingalem, pokud pro každé $s, t \in T$ takové, že $s \leq t$ platí
$$E[X_t|\mathcal{F}_s] \overset{\text{sj}}{=} X_s \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{F}_s, P|\mathcal{F}_s).$$
3. Je-li navíc $T = \mathbb{N}, \mathbb{N}_0, -\mathbb{N}, \mathbb{Z}$, pak nutnou a postačující podmínkou je, aby
$$E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \overset{\text{sj}}{=} X_n \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{F}_n, P|\mathcal{F}_n)$$
platilo pro každé $n \in \mathbb{Z}$ takové, že $n, n+1 \in T$.

---

[1] Tj. $\int g_{n+1}(x, \xi)\, d\xi = g_n(x)$ platí pro sv. $x \in \mathbb{R}^n$.

[2] Tj. ν_n je marginální míra ν_{n+1} odpovídající prvním n-souřadnicím.